Μάθημα 6ο — Γραμμική Άλγεβρα II — 3/3/2016.

Φυλλάδιο #1.

Ασκ: 6 $T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $T(f(x)) = f'(x)$

Βαθμίδα, Ορίζουσα, ίχνος της $T = tr([T]_a^a)$

$\dim Im f = rank[T]_a^a$ $\qquad \det([T]_a^a)$

Διαλέγω την κανονική βάση: $a = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$T(1) = 1' = 0$, $T(x) = 1$, $T(x^2) = 2x$, $T(x^3) = 3x^2$, ..., $T(x^n) = nx^{n-1}$

Επομένως,

$$[T]_a^a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$T(1)$ $\quad T(x)$ $\quad T(x^2)$ $\quad T(x^3)$ $\quad T(x^n)$

$rank(T) = rank([T]_a^a) = n$

$\det(T) = \det([T]_a^a) = 0$

και

$tr(T) = tr([T]_a^a) = 0 + \ldots + 0 = 0$ γιατί όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι 0

Ασκ: 9 $V = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b + 3c = 0\} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2$

$\psi((x,y,z)) = (x, 4y + 6z)$, $\phi = \psi_V$

(i) Νδο είναι γραμμικές απεικονίσεις.

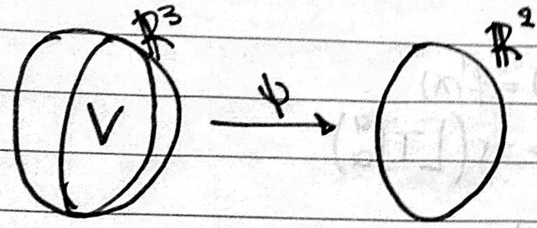
Έστω (x_1, y_1, z_1) και $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

▶ $\psi((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) = \psi((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = (x_1+x_2, 4(y_1+y_2) + 6(z_1+z_2)) =$
$= (x_1, 4y_1 + 6z_1) + (x_2, 4y_2 + 6z_2) = \psi((x_1,y_1,z_1)) + \psi((x_2,y_2,z_2))$

▶ Για $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda(x,y,z)) = \psi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, 4\lambda y + 6\lambda z) = \lambda(x, 4y + 6z) =$
$= \lambda \psi(x,y,z)$.

Άρα είναι γραμμική

<u>Περιορισμός</u> : Η συνάρτηση παίρνει τις ίδιες τιμές αλλά αλλάζει το πεδίο ορισμού (ίδιος τύπος)



Η ϕ είναι περιορισμός της ψ στο V άρα : $\phi = \psi_V$

Έστω $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in V$

▶ $\phi((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = \phi((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) = \psi((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \overset{(\text{γραμμική})}{=}$
$= \psi(x_1,y_1,z_1) + \psi(x_2,y_2,z_2) = \phi(x_1,y_1,z_1) + \phi(x_2,y_2,z_2)$.

▶ Για $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(\lambda(x,y,z)) = \psi(\lambda(x,y,z)) \overset{(\psi \text{ γραμμική})}{=} \lambda\psi((x,y,z)) = \lambda\phi(x,y,z)$

Άρα η ϕ είναι γραμμική

(ii) $\operatorname{rank}\psi = \operatorname{rank}[\psi]_a^b$, όπου a, b οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$:

$a = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $b = \{(1,0),(0,1)\}$.

$[\psi]_a^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, άρα $\operatorname{rank}\psi = \operatorname{rank}[\psi]_a^b = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 2$.

$\psi(0,1,0) = (0,4)$
$\psi(0,0,1) = (0,6)$

(iii) $V = \{(a,b,c) \mid a+2b+3c=0\} = \{(-2s-3t, s, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} =$

$= \{s(-2,1,0) + t(-3,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (-2,1,0), (-3,0,1) \rangle$.

$a+2b+3c=0$
$[1\ 2\ 3 \mid 0]$
επαυξημένος

$\Rightarrow a = -2s-3t$
$b = s$
$c = t$

Δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν το ένα <u>ΔΕΝ</u> είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Ένα διάνυσμα είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν δεν είναι 0.

→ →

Άρα $\gamma = \{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ βάση του V.

Σχόλιο: Δεν μπορούσαμε να πάρουμε την κανονική βάση α γιατί έχει αλλάξει ο χώρος και από $\mathbb{R}^3$ έγινε V (υπόχωρος). Όμως, μπορούμε να πάρουμε την β γιατί πάει πάλι στον $\mathbb{R}^2$

$$[\phi]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}\phi = \text{rank}[\phi]_\gamma^\beta = \text{rank}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

2x2

$\phi(-2,1,0) = \psi(-2,1,0) = (-2,4)$

$\phi(-3,0,1) = \psi(-3,0,1) = (-3,6)$

γιατί οι δύο γραμμές (ή στήλες) είναι γραμμικά εξαρτημένες, αφού η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης.

Ορισμός: Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος και $f: V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Ένα στοιχείο $\lambda \in K$ λέγεται ιδιοτιμή της f αν υπάρχει μη-μηδενικό $\vec{v} \in V$ τέτοιο ώστε $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το $\vec{v}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ.

{Παραδείγματα}

① Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$. Έστω λ ιδιοτιμή και (x,y) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

$(x,y) \neq (0,0)$. $T(x,y) = \lambda(x,y)$

$(x+2y, 3x+2y) = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2y, 3x+2y) = (\lambda x, \lambda y)$ προκύπτει το σύστημα:

$$(\Sigma)\begin{cases} x+2y = \lambda x \\ 3x+2y = \lambda y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x+2y = 0 \\ 3x+(2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

είναι ομογενές δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Θέλω να ΜΗΝ είναι Cramer γιατί αλλιώς θα είχε μοναδική λύση, τη μηδενική, που δεν θέλω. Αναγκαστικά πρέπει η det των συντελεστών $=0$.
Αν $\det \neq 0$ τότε θα είναι Cramer, άρα έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+1) = 0.$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι 4 και -1.

Θέλω να βρω και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4 και στην -1.

(2) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = (-y,x)$

Έστω $(x,y) \neq (0,0)$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
$T(x,y) = \lambda(x,y)$
$(-y,x) = (\lambda x, \lambda y) \longrightarrow$ άρα προκύπτει το σύστημα:

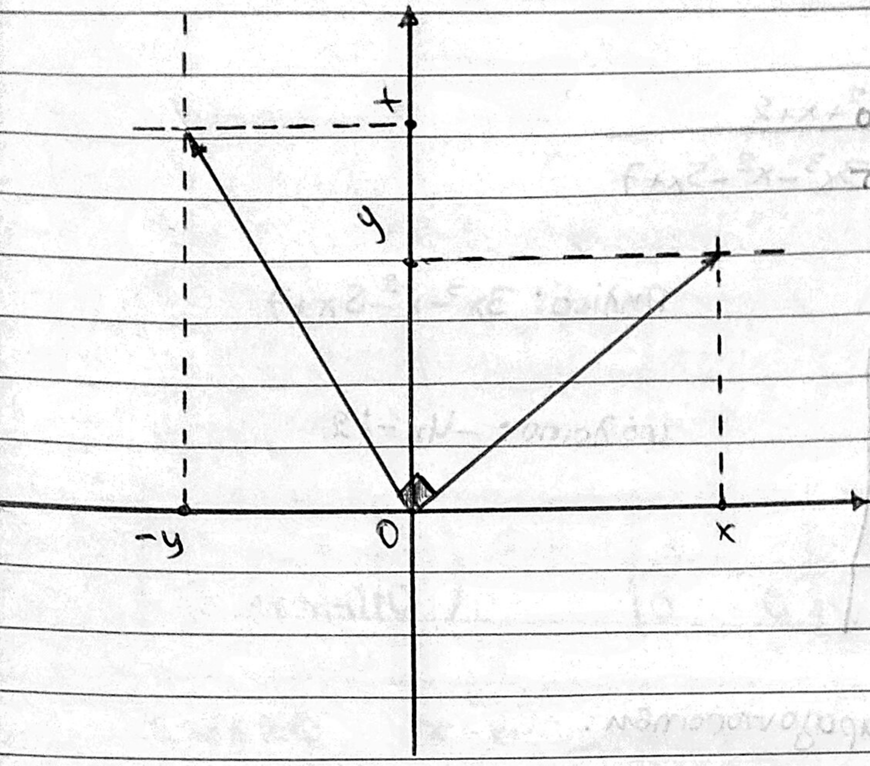
$$\left.\begin{aligned} -y &= \lambda x \\ x &= \lambda y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -\lambda x - y &= 0 \\ x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα μια τουλάχιστον λύση, τη μηδενική. Όμως, δεν θέλω να είναι Cramer, γιατί η λύση θα είναι μοναδική. Θέλω ακόμα μία μη-μηδενική τουλάχιστον

Θέλω $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2+1=0$. Δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση T δεν έχει ιδιοτιμές και άρα ούτε ιδιοδιανύσματα.

ΣΧΗΜΑ. $\longrightarrow$



Δεν έχει ιδιοδιανύσματα γιατί η απεικόνιση $T(x,y)=(-y,x)$ στρέφει τα διανύσματα κατά 90°. Το μόνο διάνυσμα που δεν στρέφεται είναι το $\vec{0}$. Άρα δεν πηγαίνει κάποιο διάνυσμα στο πολλ/σιο του εκτός από το 0 που όμως δεν είναι ιδιοτιμή

(α) Για την ιδιοτιμή 4:

$T(x,y)=4(x,y)$ → Έτσι έπρεπε να βγει.

$$\left.\begin{aligned}(1-4)x+2y&=0\\3x+(2-4)y&=0\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}-3x+2y&=0\\3x-2y&=0.\end{aligned}$$

Επαυξημένος: $\left(\begin{array}{cc|c}-3 & 2 & 0\\3 & -2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\to r_1+r_2}\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\3 & -2 & 0\end{array}\right)$ πηγαίνω στις εξισώσεις

Άρα έχω: $3x-2y=0$

$y=s$ γιατί δεν έχει αρχική μονάδα

Άρα $x=\frac{2s}{3}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής

$$s\left(\frac{2}{3},1\right)=\left(\frac{2s}{3},s\right)\quad s\in\mathbb{R},\ s\neq 0$$ → για να είναι ιδιοδιάνυσμα

(β) Για την ιδιοτιμή -1:

$T(x,y)=-1(x,y)$

$$\left.\begin{aligned}(1-(-1))x+2y&=0\\3x+(2-(-1))y&=0\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}2x+2y&=0\\3x+3y&=0\end{aligned}$$

Άρα $x+y=0$

$x=-s$

$y=s$

Προσπαθώ να βγάλω ΜΙΑ εξίσωση με 2 αγνώστους

Ιδιοδιάνυσμα $(-s,s)=s(-1,1)$ με $s\neq 0$

$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
$\mathbb{Q}$ δεν υπάρχει ρίζα
$\mathbb{R}$ $\sqrt{2},-\sqrt{2}$ πολλαπλότητα ρίζων 1
$\mathbb{C}$ $\sqrt{2},-\sqrt{2}$.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2 Φεβρ. 2016, Ιδιοτιμές

1. Να διαιρέσετε το πολυώνυμο $3x^5+2x^4-7x+2$ με το x^2+x+2.

2. Για καθένα από τα παρακάτω 4 πολυώνυμα βρείτε τις ρίζες και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες επί των σωμάτων $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$

$$x^3-x^2+2x-2, \quad x^2-2, \quad x^4-7x^3+18x^2-20x+8, \quad 6x^3+7x^2-9x+2.$$

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των παρακάτω πινάκων

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

- Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.
- Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- Βρείτε την m-στή δύναμη A^m του A, για κάθε ακέραιο $m \geq 1$.

5. Είναι ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

διαγωνίσιμος;

6. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και λ ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιόχωρο $V_A(\lambda)$. Ας είναι $\Phi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ένα πολυώνυμο. Να αποδειχθεί ότι το $\Phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\Phi(A)$ και ότι

$$V_A(\lambda) \subseteq V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

Ως συνέπεια, δείξτε ότι αν ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος τότε και ο $\Phi(A)$ είναι διαγωνίσιμος. Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι εν γένει δεν ισχύει η ισότητα

$$V_A(\lambda) = V_{\Phi(A)}(\Phi(\lambda)).$$

7. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Να δείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

8. Έστω $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε κάθε μη-μηδενικό $X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ιδιοδιάνυσμά του. Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $A = \lambda I_n$.

Φυλλάδιο #2.

①

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+2x^4+0x^3+0x^2-7x+2 & x^2+x+2 \\ \hline
-3x^5-3x^4-6x^3-0x^2-0x-0 & 3x^3-x^2-5x+7 \\ \hline
0x^5-x^4-6x^3+0x^2-7x+2 & \\
+x^4+x^3+2x^2-0x-0 & \\ \hline
-5x^3+2x^2-7x+2 & \\
5x^3+5x^2+10x-0 & \\ \hline
7x^2+3x+2 & \\
-7x^2-7x-14 & \\ \hline
-4x-12 &
\end{array}
$$

Πηλίκο: $3x^3-x^2-5x+7$

υπόλοιπο: $-4x-12$

② $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $x^3-x^2+2x-2 = \overbrace{x^2(x-1)+2(x-1)}^{\to\ \text{παραγοντοποίηση.}} = (x-1)(x^2+2)$

<u>Λύσεις</u> Στο $\mathbb{Q}$ 1

Στο $\mathbb{R}$ 1

Στο $\mathbb{C}$ $1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ $(x-1)(x^2+2)=(x-1)$

Όλες έχουν πολλαπλότητα 1

Πολλαπλότητα της ρίζας $\rho \in K$ του πολυωνύμου που ανήκει στο $K[x]$ ($f(x) \in K[x]$) λέγεται ο εκθέτης του $(x-\rho)$ στην ανάλυση.

$f(x) = a_n p_1^{n}(x) \cdots p_t^{n_t}(x)$

↳ Εφόσον $(x-\rho) \mid f(x)$

Αν η απεικόνιση ήταν $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με τον ίδιο τύπο $T(x,y) = (-y,x)$
Κάνω τα ίδια βήματα και έχω:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda = i \text{ ή } \lambda = -i$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $i, -i$

(α) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i

(Σ) $-ix - y = 0$
$0 \ -1+i(-i) = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right) r_2 + i r_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & -1+i(-i) & 0 \end{array}\right) \text{ άρα } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Πάω πάλι στις εξισώσεις:

$x - iy = 0$ $\quad x = is$ $\quad$ Ιδιοδιανύσματα $(is, s) = s(i,1)$
$y = s$ $\quad s \in \mathbb{C}$ με $s \neq 0$

(β) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$

Γίνεται με τον ίδιο τρόπο.

$f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$

Έστω $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$, $r, s \in \mathbb{Z}$, ΜΚΔ$(r,s) = 1$ $\quad s > 0$

$r | 8 \Rightarrow r \in \{+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8\}$

$s | 1 \Rightarrow s = 1$ με $s > 0$ $\rightsquigarrow$ εγώ το επιλέγω για να μην έχω πολλές λύσεις

$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

Πιθανές λύσεις : $\{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$

$f(1) = 1^4 - 7\cdot 1^3 + 18\cdot 1 - 20\cdot 1 + 8 = 0$

$f(-1) \neq 0$

$f(2) = 16 - 7\cdot 8 + 18\cdot 4 - 20\cdot 2 + 8 = 16 - 54 + 18\cdot 4 - 40 + 8 = 0$

$f(-2) \neq 0$

$f(4) = \ldots$

$f(-4) \neq 0$

$f(8) = \ldots$

$f(-8) \neq 0$

Δεν χρειάζεται να βρώ με πράξεις το $f(4)$ και το $f(8)$ αλλά κάνω την παρακάτω διαδικασία:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Το 1 είναι ρίζα} \Rightarrow (x-1) \mid f(x) \\ \text{Το 2 είναι ρίζα} \Rightarrow (x-2) \mid f(x) \end{array}\right\} (x-1)(x-2) \mid f(x)$$

Άρα $f(x) = (x-1)(x-2) \circ A = (x^2-3x+2) \circ A$. Για να βρω το A, κάνω τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} \vdots & x^2 - 4x + 4 \\ 0 & \end{array}$$

Άρα $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)(x-2)^2 = (x-1)(x-2)^3$

Δηλαδή οι λύσεις στα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι δύο το 1 και το 2.

Το 1 έχει πολλαπλότητα 1

Το 2 έχει πολλαπλότητα 3 (γιατί είναι τριπλή ρίζα)

Ορισμός: Έστω $A \in K^{n\times n}$. Αν $\exists \lambda \in K$ και $X \in K^{n\times n}$ με $X \neq 0$ τέτοιο ώστε $AX = \lambda X$ θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το X ιδιοδιάνυσμα.

$A \in K^{n\times n}$

$K^{n\times 1} \xrightarrow{L_A} K^{n\times 1}$

$L_A(X) = AX$

$X \in K^{n\times 1}$

$L_A(X) = AX = \lambda X$

Ασκ: 8 Έστω $A \in K^{n\times n}$. Κάθε μη-μηδενικό $X \in K^{n\times 1}$ είναι ιδιοδιάνυσμα

Θέλω:

$$A = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Έστω ότι:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$, Η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα.

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ άρα αν κάνω τον πολλαπλασιασμό: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ οι 2 στήλες είναι ίσες άρα τα αντίστοιχα στοιχεία τα είναι ίσα.

$a_{11} = \lambda_1$, $a_{21} = 0$, ..., $a_{n1} = 0$

Η στήλη $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, άρα:

$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, άρα $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, ..., $a_{n2} = 0$

→ → →

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda n \end{pmatrix}$$ Επομένως, $a_{1n}=0$, $a_{2n}=0, \dots$, $a_{nn}=\lambda n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ θέλω νδο όλα τα λ είναι ίσα

Η στήλη $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda.$$